"QUEST FOR TRUTH" スピンオフ企画

from Mathematics Room 数楽通信 Vol.3

平成 28 年 5月 10日発行

発行者：大城　英暉
（勝手にやってます）

世界を動かそうと思うなら、
まずは自分自身を動かせ。

ソクラテス（哲学者／古代ギリシャ）

【QUEST】素数 p, q を用いて

$$p^q + q^p$$

と表される素数をすべて求めよ。　（2016 京大・理系）

数楽通信 vol.2 で書いたように, いくつか実験してみれば求める素数はどうやら 17（p, q の値が 2,3 の組み合わせのとき）のみのようで, p, q がともに偶数または, ともに奇数のとき は $p^q + q^p$ は 2 より大きい偶数 となりダメ。一方が 2 で他方が 5 以上の素数のとき は $p^q + q^p$ は 3 の倍数 となりそうだ, と予想できる。（1 年生はここまで把握できていれば現時点では OK!）問題はこのことを証明できるか, である。

【解答】

p, q がともに偶数, すなわち $p = q = 2$ のとき, $p^q + q^p = 8$ となり不適。また p, q がともに 3 以上の素数の場合, p, q はともに奇数であり, 奇数の累乗は奇数であるから $p^q + q^p =$（奇数）$+$（奇数）$=$（2 より大きい偶数）となり, この場合も不適である。

よって p, q のいずれか一方は 2 であり, 他方は 3 以上の素数でなければならない。ここで $q = 2$ として, 一般性を失わない。

(i) $p = 3$ のとき

$p^q + q^p = 3^2 + 2^3 = 9 + 8 = 17$ となり, 素数である。

(ii) p が 5 以上の素数のとき

このとき,「$p^2 + 2^p$ は 3 の倍数である」—(A) を示す。

p が 5 以上の素数であるから,

$$\begin{aligned} p^2 &\equiv (\pm 1)^2 \pmod 3 \\ &\equiv 1 \pmod 3 \quad \text{—(1)} \end{aligned}$$

また, $p = 2k + 3$（k は 3 の倍数ではない, ある自然数）と表せるから,

$$\begin{aligned} 2^p = 2^{2k+3} = 2 \cdot 2^{2(k+1)} = 2 \cdot 4^{k+1} &\equiv 2 \cdot 1^{k+1} \pmod 3 \\ &\equiv 2 \pmod 3 \quad \text{—(2)} \end{aligned}$$

(1), (2) より

$$\begin{aligned} p^q + q^p = p^2 + 2^q &\equiv 1 + 2 \pmod 3 \\ &\equiv 3 \pmod 3 \\ &\equiv 0 \pmod 3 \end{aligned}$$

これにより (A) が示された。

以上より, 求める素数は

$$\underline{\underline{17}}$$

【合同式を使わない (A) の証明は裏面へ】

"QUEST FOR TRUTH" スピンオフ企画
from Mathematics Room 数楽通信 Vol.3
平成 28 年 5月 10日発行
発行者：大城　英暉
（勝手にやってます）

別解だよ～！
（といっても本質的には全く同じ）

表面 (ii) の「p^2+2^p は 3 の倍数である」—(A) を示すために合同式を用いましたが, 2 項定理を使って証明することもできます。

【(A) の別証】

p が 5 以上の素数であるから, 3 の倍数でない ある自然数 k を用いて $p=3+2k$ と表せる。このとき

$$p^2=(3+2k)^2=9+12k+4k^2=3(3+4k+k^2)+k^2 \text{—(1)}$$

となり, k は 3 の倍数でないから, さらにある自然数 m を用いて $k=3m\pm1$ と表現できる。

$$k^2=(3m\pm1)^2=9m^2\pm6m+1=3(3m^2\pm2m)+1$$

であるから, (1) とあわせて $p^2=3M+1$—(2) (M はある整数) とかける。

また,

$$\begin{aligned}2^p&=2^{3+2k}\\&=2^{2(k+1)+1}\\&=2\cdot2^{2(k+1)}\\&=2\cdot4^{k+1}\\&=2\cdot(3+1)^{k+1}\\&=2\cdot\left(\sum_{i=0}^{k}{}_{k+1}\mathrm{C}_i\cdot3^{k+1-i}+1\right)\\&=\underline{\underline{2\cdot\sum_{i=0}^{k}{}_{k+1}\mathrm{C}_i\cdot3^{k+1-i}}}+2\end{aligned}$$

であり, 上式の 2 重下線部は 3 の倍数であるから $2^p=3N+2$—(3) (N はある整数) と書ける。

以上 (2), (3) より

$$p^2+2^p=(3M+1)+(3N+2)=3(M+N+1)$$

となり (A) が示された。 □

まぁ, 実は合同式とやってることは全く同じなのです。と考えると, 合同式による表現はシンプルで良いですね。うまく使いこなせるようになりたいものです。