"QUEST FOR TRUTH" スピンオフ企画

from Mathematics Room 数楽通信 Vol.5

平成 29 年 2 月 24 日 発行
発行者：大城 英暉
（勝手にやってます）

数学の本質は自由にあり

ゲオルク・カントール（数学者／ドイツ）

前号掲載の Quest:

> 1 から 200 まで順に並んだカードがある。
> 1 番上のカードを 1 番下に回し, 次のカードを捨てる作業を繰り返したとき, 最後に残るカードは何番でしょうか。

について。手を動かして実験してみれば解答はわかると思いますが, 合わせて数学的な考察も行ってみます。考察するために幾つか用語を定義しておきます。

1. 1 番上のカードを 1 番下に回し, 次のカードを捨てる作業を**ステップ**といい,
2. カードが 1 番上から小さい順に並んた状態から何回かステップを行った後, 次に, 残ったカードが 1 番上から小さい順に並んだ状態になることを**サイクル**という

ことにします。例えばこんな感じ：

○ カードが 1,2,3,4,5,6 と並んでいるときに 1 ステップ進むと 3,4,5,6,1 となる。
○ カードが 1,2,3,4,5,6 と並んでいる状態から 1 サイクル進むと 1,3,5 となる。

さて, 1〜200 のカードが順に並んだ初期状態から, サイクルごとにどう変化するか, 必要に応じてステップも細かく分割して追いかけてみる。

（初期状態）	1, 2, 3, 4, 5, 6, ... , 196, 197, 198, 199, 200	（200枚, 差は1ずつ）
（1サイクル後）	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... , 195, 197, 199	（100枚, 差は2ずつ）
（2サイクル後）	1, 5, 9, 13, 17, ... , 193, 197	（50枚, 差は4ずつ）
（3サイクル後）	1, 9, 17, 25, ... , 185, 193	（25*枚, 差は8ずつ）
（12ステップ後）	$\boxed{193}$, ①, 17, 33, ... , 177 （捨てる）	（サイクル終了までは後1ステップ）
（4サイクル後）	17, 33, 49, 65, ... , 177, 193	（12枚, 差は16ずつ）
（5サイクル後）	17, 49, 81, 113, 145, 177	（6枚, 差は32ずつ）
（6サイクル後）	17, 81, 145	（3*枚, 差は64ずつ）
（1ステップ後）	$\boxed{145}$, ⑰ （捨てる）	（サイクル終了までは後1ステップ）
（7サイクル後）	<u>145</u>（答）	

図 1

これで答えは出ましたが, 任意の枚数のときに残るカードをどのようにして求めるかを考えてみよう。

2 枚に 1 枚は捨てるので, 1 サイクル終わったら枚数は基本的に半分になるのですが, 上の状態の変化を見てわかると思いますが, 残り枚数が奇数になったときが 1 つのポイントとなります。残り枚数が偶数枚のときには, 次のサイクル終了時にはもとの先頭カードがそのまま先頭カードとなっていますが, 残り枚数が奇数枚のときは, 次のサイクル終了時にはもとの先頭カードは破棄されて, その次のカードが先頭となっています。（これを "先頭の交代" と呼ぶことにします。）残り枚数の変化を追いかけるために次のような計算をしてみる：

2) 200		（余り）	
2) 100	…	0	（1サイクル終了）
2) 50	…	0	（2サイクル終了）
2) 25	…	0	（3サイクル終了）
2) 12	…	$\boxed{1}$	（4サイクル終了）
2) 6	…	0	（5サイクル終了）
2) 3	…	0	（6サイクル終了）
1	…	$\boxed{1}$	（7サイクル終了）

図 2

左図の四角で囲まれた余りが 1 のところで先頭の交代が行われている。最初の先頭のカードは 1 であった。4 サイクル終了後の先頭カードが何になるかというと, 200 を 2 で 4 回割っているので, 連続したカード間の数字の差は $2^4 = 16$ となっていたから $1 + 2^4 = 17$ となる。しばらくは 17 が先頭のカードとなるが, 7 サイクル目で先頭の交代が行われる。このときは 7 回割り算が行われているので, 先頭のカードが $17 + 2^7 = 145$ となって, これで終了となる。

さて, 任意の枚数のカードで Quest と同じ操作を行ったとき, 最後に残るカードについて何か規則性がないかを調べてみよう。（次ページへ）

任意枚数のカードについて最後に残るカード番号の求め方を考えよう。

1〜n までの番号が書いてあるカードが各 1 枚ずつある。最後に残るカード番号を r として, 具体的に n が 1, 2, 3, ... のときの r を求めて表にしてみた：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
r	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3	5	...

かなりきれいな規則性が見えますね (^^)。n が 2 のべきになっているときは, 2 で何回割っても（商が 1 になるまでは）常に割り切れるので, 先頭の交代は行われず, 各サイクル終了後の先頭のカードは 1 となります。n が 2 のべきではないときは, n を超えない最も n に近い 2 のべきから数えて何番目の数字かが分かれば, r が求まります。まとめると次のようになります：

（☆）
任意の自然数 n に対して
$$n = 2^k + \ell, \quad 0 \leqq \ell < 2^k$$
を満たす整数の組 (k, ℓ) がただ 1 つ定まり, $r = 2\ell + 1$ である。

これが正しいことを $n = 200$ のときで説明します。図 2 をみた時点で気づいたかと思いますが, 2 進数を使うと, とても分かりやすくなります。2 進法の表記を 10_B などと書くことにします。また, 2 進数について一番右側の位から左へ順番に第 1bit, 第 2bit, 第 3bit, ... と呼び, 一番左側の bit を最高位 bit と呼ぶことにします。

図 2 より
$$200 = 2^7 + (2^6 + 2^3) = 11001000_B$$

となる。（☆）からすると $\ell = 2^6 + 2^3 = 1001000_B$ となって, $n = 200$ の最高位 bit を取り除いたものになる。前ページの結果から, 第 1bit の数字が 0 →第 1 サイクル終了時では先頭の交代は起こっていない, などと読み取れる。第 4bit が 1 なので, 第 4 サイクルで先頭の交代が起きている。2 での割り算は 4 回行っているので, 隣り合うカード間の差は 2^4 となっていて, 元々の先頭のカードは 1 であったから, 4 サイクル終了後の先頭は $2^4 + 1$ となる。更に第 7bit が 1 より第 7 サイクル終了時の先頭カードは 2 での割り算が 7 回, カード間の差は 2^7 になっているので $2^7 + (2^4 + 1)$ となり, これが最後に残るカードの番号 r である。このとき $r = (2^7 + 2^4) + 1 = 2(2^6 + 2^3) + 1 = 2\ell + 1$ となって, 確かに $n = 200$ のとき（☆）が成立している。

もう少し整理すると,
①与えられた n を 2 進法で表現する　②最上位 bit を取り除く　③残った数字を 2 倍する　④最後に 1 を足す
という方法で求められる・・・・・・って, この計算を 2 進数で表現してみたらこんなことになっている：

$$\begin{aligned} 200 &= 11001000_B \\ \to \ell &= \ \ 1001000_B \\ \to r = 2\ell + 1 &= \ \ 1001000_B \times 10_B + 1_B \\ &= 10010000_B + 1_B \\ &= 10010001_B = \boxed{145} \end{aligned}$$

これって実は n を 2 進法で表記したときの最高位 bit を一番右端に移す（2 進数のローテイト演算：コンピュータの内部で行われる計算の 1 つです）だけで r が求められるということを表している。例えばこのページの上にある表から $n = 11$ を選んでやってみると

$$n = 11 = 1011_B \to r = 0111_B = 7$$

となってちゃんと求まります。（面白いでしょ!?）また $n - r$ で n の bit 反転が得られます。$n = 11 = 1011_B$ のときは $n - r = 1011_B - 0111_B = 0100_B$ となって $n = 1011_B$ の各ビットで 0 と 1 を入れ替えたものになります。