"QUEST FOR TRUTH" スピンオフ企画

FROM MATHEMATHICS ROOM
数楽通信　Vol.9

発行日：平成 29 年 4 月 27 日

研究推進部：大城　英暉

「なりたかった自分」になるのに、
遅すぎることなど
決してないのだ。

ジョージ・エリオット（作家／イギリス）

前号の Quest

次の条件 (i), (ii) をともに満たす正の整数 N をすべて求めよ。

(i) N の正の約数は 12 個

(ii) N の正の約数を小さい方から順に並べたとき, 7 番目の数は 12.

ただし, N の約数には 1 と N も含める。

（2017 東工大）

条件にそって丁寧に考えていけば正解できる問題です。1 つ落とし穴があるので注意。

【解答】

12 が N の正の約数であるから, 12 の正の約数 1,2,3,4,6,12 も N のそれとなる。よって N の正の約数を小さい順に書き並べたとすると, 次のような状態になる:

1 番目	2 番目	3 番目	4 番目	5 番目	6 番目	7 番目	8 番目	9 番目	10 番目	11 番目	12 番目
1	2	3	4	■	■	12	□	□	□	□	N

5 番目または 6 番目が 6 となる。

(I) **6 が 6 番目の約数のとき**, 5 番目の約数は 5 でなければならない。このとき, N は 2 でも 5 でも割り切れるので, 10 も N の約数でなければならない。このとき 12 の前にもう一つ約数が存在することになり, 条件 (ii) に反する。

(II) **6 が 5 番目の約数のとき**, 6 番目の約数となる可能性のある整数は 7, 8, 9, 10, 11 であるが, (I) にの考察から 6 番目の約数が 10 であるとすると, 5 も N の約数となるため, やはり条件 (ii) に反する。よって, 6 番目の約数となる可能性のある数は 7, 8, 9, 11 である。また, 条件 (i) より N の正の約数の小さい順に並べたときの k 番目の約数を P_k と表すと, $P_7 = 12$ であり, $N = P_1 \times P_{12} = P_2 \times P_{11} = \cdots = P_6 \times P_7$ が成立する。

（ア）$P_6 = 7$ のとき

このとき $N = 7 \times 12 = 84$ で 84 の約数は 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84 となり条件 (i), (ii) を満たす。すなわち 84 は解の一つである。

（イ）$P_6 = 8$ のとき

このとき $N = 8 \times 12 = 96$ で, その約数は 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96 となり条件を満たす。すなわち 96 も解の一つ。

（ウ）$P_6 = 9$ のとき

このとき $N = 9 \times 12 = 108$ で, その約数は 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 24, 27, 54, 108 となりこれも条件を満たす。すなわち 108 も解の一つ。

（エ）$P_6 = 11$ のとき

このとき $N = 11 \times 12 = 132$ で, その約数は 1, 2, 3, 4, 6, 11, 12, 22, 33, 44, 66, 132 となりこれも条件を満たす。すなわち 132 も解の一つ。

以上より求める N は $N = 84, 96, 108, 132$。

今回 3 年の N 君 1 名のみが提出してくれました。上の解答の波線部分は彼の発想を使ったものです。普通は問題文の条件から $N = 2^5 \times 3$ or $N = 2^2 \times 3^3$ or $N = 2^2 \times 3 \times p$（$p$ は 2, 3 以外の素数）のパターンしかないことから解いていきます。N 君の解答には不備がありましたが, 発想の良さと 1 名のみの応募ということで, う〇い棒進呈しました (^^)。