"QUEST FOR TRUTH" スピンオフ企画

FROM MATHEMATHICS ROOM
数楽通信 *Vol. 13*

発行日：平成 29 年 10月 13日

♧

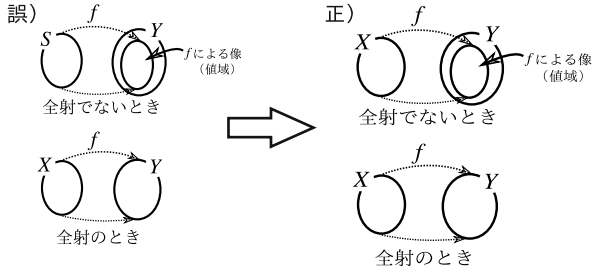
研究推進部：大城　英暉

自分の進む道を
知っている者に、
世界は道を譲ってくれる。

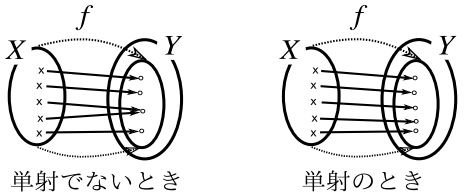
ディビッド・スター・ジョーダン（学者／アメリカ）

レイアウトを変えて2段組にしてみました．1段組のときと2段組, どちらが読みやすいでしょうか？

まずは前号の訂正です. 全射でない場合と全射である場合の比較図が一部間違っていました.



また, 写像 f が単射でない場合と単射の場合の比較図を下に載せます.



あみだくじで数学してみる②

写像についてもう一つだけ定義をします. 写像 f が X から X への写像で, X の要素 x に x 自身を対応させる写像であったとき, f を "恒等写像" と呼びます. 恒等写像は（自明な）全単射となっています. では

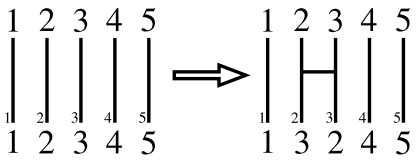
あみだくじ（で作られる写像）は全単射である

ことを説明してみよう.

ここでは縦線が n 本（n は2以上の自然数）のあみだくじを考える. 図では $n = 5$ のときを描いておく.

スタート地点とゴール地点に, 左から順に1, 2, . . ., n と番号を振る. そして, あみだくじをたどってゴール先にスタート地点の番号を書くことにする.

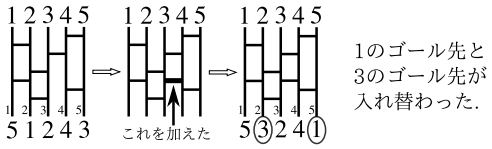
まず横棒が一本もないあみだくじを考えるとスタート地点の番号とゴール地点の番号の対応は 1 は 1 に, 2 は 2 に, . . ., n は n となるから恒等写像である. これは上で述べたように全単射.



これに横棒を一本加える. たとえば 2 と 3 の間に一本入れたとしよう.

どんなことになるかというと, 2 のゴール先と 3 のゴール先が入れ替わるということになった. この操作でスタート地点とゴール地点の対応関係は変わったとしても, 写像として全単射である（2つの異なるスタート地点のゴール地点は必ず異なり, どのゴール地点を選んでも, そこに繋がるスタート地点が必ず存在する）ことは変わっていない.

では, あるあみだくじがあり, それが全単射だとわかっているとする. そのあみだくじに新たに横線を一本加えたらどうなるか?



これも, ある2つのスタート地点のゴール先を入れ替える操作になるので, 元のあみだくじが全単射であるならば, 横棒を一本加えたあみだくじもやはり全単射になっている.

---------- ♠ ----------

以上の話をまとめると, 次のようになる：

(I) 横棒が全くないあみだくじは全単射

(II) 上のあみだくじに横棒を一本加えてもある2つのゴール地点を入れ替えるだけで, 全単射であることは変わらない.

(III) どんどん横棒を加えていってもゴール地点の入れ替えが次々と起こるだけで, 全単射であることは変わらない

よって, 任意のあみだくじ（で作られる写像）は全単射となっている.（こんな考え方を数学的帰納法という.）

---------- ♢ ---------- ♣ ---------- ♢ ----------

$f : X \to Y$ が単射であれば, $y = f(x)$ によって $y \mapsto x$ と対応させる写像を考えることができ, これを f の逆写像といい, $f^{-1} : Y \to X$ とかく. ただし, f^{-1} の定義域は通常 Y の部分集合である. f が全単射であれば, $f^{-1} : Y \to X$ も全単射で, 定義域も Y そのものとなる. あみだくじで言えば, 作ったあみだくじをひっくり返しても（上下方向にウラ返しても）ちゃんとあみだくじになっている, ってことです(^^).

次号 Quest の解答をしてその次の号から, あみだくじがスタートの並びをゴールで入れ替える, ということから, "置換群" の話をしてみます.