"QUEST FOR TRUTH" スピンオフ企画

FROM MATHEMATHICS ROOM
数楽通信 *Vol. 14*

発行日：平成 29 年 10月 19日

♧

研究推進部：大城　英暉

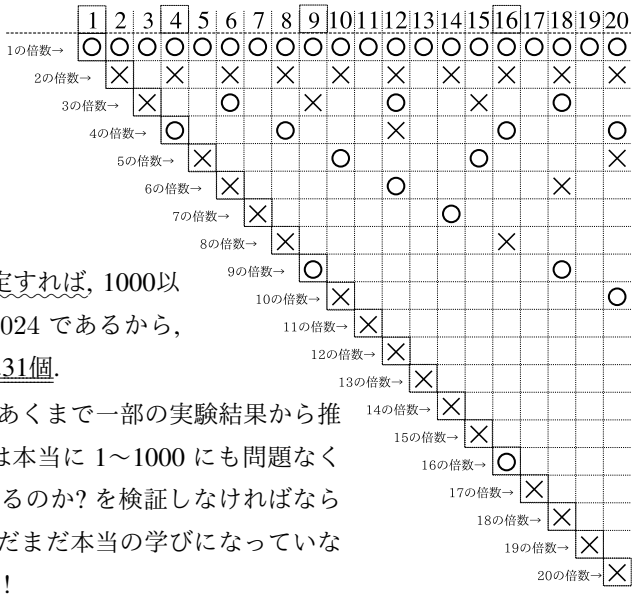
真の才能とは，
自分自身を信じることだ．
自分の力を信じることだ．

マクシム・ゴーリキー（作家／ロシア）

Quest の解答なので, 再び1段組で組みます(^^;)

前回の Quest

1から1000までの番号のついた電球それぞれに, On, Offを切り替えるスイッチがついている. はじめはすべての電球はOffの状態である. まず1の倍数の電球のスイッチをすべて切り替える. 次に2の倍数の電球のスイッチだけを切り替える. さらに3の倍数の電球のスイッチだけを切り替える. 以下同様の操作を続け, 最後に1000の倍数の電球のスイッチを切り替える. このとき, Onになっている電球は何個あるか?



これは実験をしてみれば, すぐに法則性が見えてくるはずです.

とりあえず20個で実験してみたのが右の図です. 図の中の○や×の記号が切り替えスイッチを操作して On や Off になったことを表しています. 最終的に○になっている数字を見てみると 1, 4, 9, 16 で, いわゆる"平方数"（自然数の2乗になっているもの）です.

この 1〜20 での法則がそのまま 1〜1000 にも適用できると仮定すれば, 1000以下の平方数の個数を調べれば良いことになる. $31^2 = 961$, $32^2 = 1024$ であるから, 1000以下の平方数は31個. すなわち, On になっている電球の個数は31個.

・・・とまぁ, 一応答えは出て, しかも正解なのではありますが, あくまで一部の実験結果から推測しただけなので, 数学としては全然物足りない. 1〜20 での法則は本当に 1〜1000 にも問題なく適用できるのか? そもそもなぜ平方数の番号の電球だけが On になるのか? を検証しなければならない. 「答えが出たから終わり!」なんてことをやっている間は, まだまだ本当の学びになっていない. 「なぜ?」という知的好奇心とそれを追い求める探究心を持とう!

実験の図を見ながら考えてみよう. まず元々 Off になっていたスイッチが何回かの操作の後 On となるのはスイッチ操作が1回, 3回, 5回, . . . と奇数回操作したときです. 実際に実験結果の表を見ると1番は1回, 2番と3番は2回, 4番は3回, などとなっている. では「いつ」スイッチの操作が行われたのか? を見てみると, 1番は1の倍数のとき, 2番は1の倍数・2の倍数のとき, 3番は1の倍数・3の倍数のとき, 4番は1の倍数・2の倍数・4の倍数のとき, ちょっと飛んで12番は1の倍数・2の倍数・3の倍数・4の倍数・6の倍数・12の倍数のとき, などなど. つまり, ある番号のスイッチはその番号の約数の倍数で操作したときに切り替えられることになる（なんか伝わりづらい表現だな）. 要は約数の個数がスイッチ操作の回数となる. 最終的に On になるのは約数の個数が奇数個の数字に限られる. ところで例えば $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ の約数の個数は $(3+1)(2+1)(1+1) = 24$ 個と計算される. 一般に素因数分解して $p^a q^b r^c$ （p, q, r は素数, a, b, c は自然数）と表される数の約数の個数は $(a+1)(b+1)(c+1)$ となる. 約数の個数が奇数個であるためには, 素因数分解した結果, 各素因数の指数がすべて偶数であることが必要十分条件. これを満たす数は平方数に他ならない. （例）$2^2 \times 3^4 \times 5^6 = (2 \times 3^2 \times 5^3)^2$.

よって, 1〜1000で電球が On になるのは $1, 4, 9, \ldots, 31^2$ の31個. （応募者は1名のみ. う○い棒進呈）

Quest

n を自然数とするとき, $m \leqq n$ で m と n の最大公約数が 1 となる自然数 m の個数を $f(n)$ とする.

(1) $f(15)$ を求めよ.

(2) p, q を互いに異なる素数とする. このとき $f(pq)$ を求めよ.（名大・文系）

【10月27日（金）17:00 締切】

★ 来週，数学検定の申込み受付やるよ〜! 忘れないでね!!