"QUEST FOR TRUTH" スピンオフ企画

FROM MATHEMATHICS ROOM
数楽通信 *Vol. 17*

発行日：平成 29 年 11月 10日

研究推進部：大城　英暉

己の無知を自覚するのは，
知識を得るための
大いなる一歩となる．

ベンジャミン・ディズレーリ（政治家／イギリス）

あみだくじで数学してみる④【最終回】

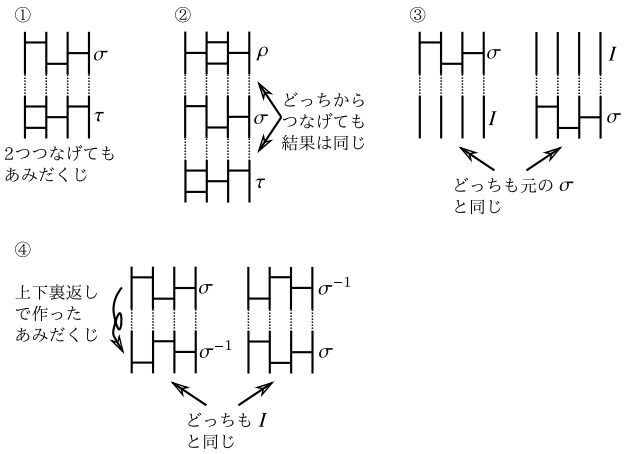
Vol.15 で群の定義をしてみましたが, 良く分からないよね.そこで, あみだくじに戻ってイメージしてみよう.

①「内部算法が定義されていて, それについて閉じている」については, あみだくじを2個つなげても, やっぱりあみだくじになってるでしょ? ってことです.

②「結合法則が成り立つ」については, 3個のあみだくじρ, σ, τ をこの順につなげて新しいあみだくじを作るとき, 先に ρ と σ をつなげてから τ をつなげても, 先に σ と τ をつなげてから τ をつなげても結果は全く一緒だよね? ってことです.

③「単位元が存在する」については, 横棒が一本もないあみだくじが単位元 I となります. 任意のあみだくじ σ に対して, I を後ろにつなげても, 前につなげても, 元のあみだくじ σ と全くおなじになりますよね? ってことです.

④「逆元が存在する」については, 任意のあみだくじ σ について, 上下方向に裏返しにしたあみだくじを考え, それを τ とする. σ に τ を後ろにつなげても, 前につなげても, 結果は横棒が一本もないあみだくじと全くおなじになります. この τ のことを σ の逆元 σ^{-1} と呼びます.



あみだくじだけで話できるなら, わざわざ置換を持ち出してそれらが作る対称群なんて作らなくても良いんじゃない? と思う人もいると思いますが, あみだくじだけで考えるとちょっと不都合があります. 上の図の④の場合を見てもらえればわかりますが, 見た目が違うあみだくじでも結果が全く同じものが実は無数に作れます.

大学でやる群論の話では, 置換を定義した後, 「巡回置換」というものを定義して,更に「互換」というものを定義します. 任意の置換は巡回群の積で書けることを証明し, その上で任意の置換が互換の積で表現できる, ということを証明します. あまり深入りすると大変なので, そろそろ話を終わりにしたいと思いますが, 最後に互換の話だけやっておきます.

「互換」と言うのは置換の中でも2つだけを入れ替えるもののことを言います. 例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

は互換です. 変わらないものを書くのもうるさいので, 上の互換は簡単に $(2,3)$ とどれとどれを入れ替えるのか, だけを書いて表現します.

任意の置換は互換の積で表現できるのですが, この表現法は一通りではなく, 無数にあります. 実は互換はあみだくじでは横棒に相当します. あみだのイメージで考えると, ある置換を表すあみだくじには, 横棒の入れ方を工夫すればいくらでも見た目の違うものが作れる, ってことです. ここで一つ面白い性質があって, いくらでもたくさん作れるのですが横棒の数は必ずすべて偶数か, すべて奇数か揃っています. あみだくじにした時, 横棒の数が偶数の置換を偶置換といい, 横棒の数が奇数のものを奇置換といいます.

以上のことは代数学の中で学ぶごく一部の内容なのですが, 最初に学んだときは「何だこれ?」と正直思いました. けれどこんなに身近な例で高等数学の内容に触れることが出来るのですから, 不思議だけど面白いものだな～と思います. 詳しく知りたい人は, 群論の本を読んでみてくださいね. このネタはこれで終わりにします.

次回は Vol.16 掲載の Quest の解答をします. こんな問題でした：

Vol.16 の Quest

縦の長さが a, 横の長さが b の長方形がある（$a < b$）. この長方形と同じ面積の正方形を図示せよ.

本日の17時までレポート受け付けます.