雄　飛

向陽高校進路便り　第 108 号
平成 29 年 3 月 15 日(水)
～臥龍鳳雛～

２２期生センター試験まで
304

2 年生へ

特別連載コラム数学編⑦（全 3 回予定）大嶺和大

1　はじめに　～勉強はしているのに～

「何だこの点数は!!!!　ちゃんと勉強したのか!!!!???」
この一年間数学科の先生に散々言われてきた事，もしくはテストの分析で書かれてきたことですね．
そのたびに
「教科書の問題結構やったんだけどなぁ，3TRIAL の問題にも目を通していたのに・・・」
と感じているちゃんと勉強した人 (ここでは勉強したつもりになっていた人も指します) は多かったかもしれません．我々教員というのは，テストで点数の取れなかった人に「お前の不勉強のせいだ!!!」と注意することが多いです．しかしちゃんと勉強した人からするとそんな怒られ方をするのは理不尽ですよね．でも仕方ないんです．だってちゃんと勉強したら点数を取れるようになった人達が教師をしているんですよ．だから勉強したのに点数が取れない人達を理解するのがとても難しいんです．

しかし我々教員も挫折をしています．高校より難易度の上がる大学では考えても勉強しても理解が出来ないという苦しい時期もありました．だから教員は大学での学力上位層ではありません．学力上位層は，大学教授になっています．皆さんの聞いたことのある企業で製品開発をしています．高い給与が安定してもらえる国家公務員になっています．なので TV 番組の「さんまの東大方程式」の中での発言で「教師は中間層である」というのは最もな意見だと思います．

そのためここでは私が大学時代に勉強しても理解出来ず，諦めそうになったときに行った事を高校数学に落として書いていきたいと思います．はじめにの時点で長くなっていますが，読み終わった時に，上記の事で壁にぶつかっている人への数学の勉強方法に対する考え方を変化させる自信はあります．あっ，本当に不勉強の人は読んでも変わりません．そんな人はまず勉強しましょう．

2　教科書の解答方法に疑問を持つ

問 1. $y = x^2 + 6x \cdots$① のグラフを書きなさい．
はい，この問題簡単ですね．平方完成して頂点を求めて・・・，って何で平方完成したら頂点が分かるんですか？勉強したつもりになっている人にありがちなのが，この問題はこう解くというパターン暗記をよく見ます．これはよくありません．こういう人は出題方式を
問 2. $x^2 + 2x$ の最小値を求めなさい．
と少し変えられると解けなくなる傾向があります．数学の全ての問題にこの解法に至る論理的理由があります．その論理的理由を簡単な問題でも求めるべきです．

平方完成って何だ？

平方完成とは変数 x を 2 乗 (平方) の形に表すことです．変数 x を 2 乗の形で表すことが出来ると，その 2 乗で表した部分の最小値は 0 です．つまり平方完成とは x^2 の項と x の項をまとめて 2 乗の形にして，与えられた 2 次式全体の最小値をはっきりさせるという効果があります．2 次関数として考えた場合，結果として頂点が分かります．この部分をはっきりさせる必要があります．

よって問 2 の答えは，平方完成して $(x+1)^2 - 1$ となり，$x = -1$ で最小値 -1 となります．
つまり問 1 は頂点を求めるから平方完成をするのではなく，①のグラフを最小値を知りたいから平方完成をし，結果頂点が分かると考えるといいと思います．こんな今まで当たり前だ，と思っていたことから疑問に持つと物事の繋がりが見えてきます．

3　教科書は急にまとめ始める

問 3. $y=3x+5$ のグラフを書きなさい.

中学生レベルの問題で非常に簡単です．傾き 3 で切片 5 の直線です.

ここではこの問題の視点を変えてみましょう．数学 I の教科書でこんな公式を習います.

平行移動の公式

放物線 $y=ax^2+bx+c\cdots$① のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフは①において，x を $x-p$，y を $y-q$ におき換えた式 $y-q=a(x-p)^2+b(x-p)+c$ になる.

平行移動した値とおき換える値の符号を変える注意が必要です．符号が変わる理由まで把握した方がいいですが，ここでは割愛します．教科書をさらに読むとこうも記されています.

平行移動の公式 (一般 ver.)

一般に，関数 $y=f(x)$ のグラフ F を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動して得られる曲線を G とするとき，G の方程式は，$y-q=f(x-p)$ である.

教科書が「一般に」とか言い始めた場合,「たとえどんな場合であったとしても」という意味です．たとえどんなグラフであったとしても $y=f(x)$，つまり $y=(x$ の式$)$ で書かれているグラフを上記のように平行移動したければ x に $x-p$ を，y に $y-q$ を代入すればできると書いているのです.

これをふまえて問 3 を以下の 2 つの考え方で見てみましょう.

(1)$y=3x+5$ は $y-5=3x$ と変形ができます．これは $y=3x$ のグラフを y 軸方向に 5 だけ平行移動したグラフとみれます.

(2)$y=3x+5$ は $y=3(x+\frac{5}{3})$ と変形ができます．これは $y=3x$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{5}{3}$ だけ平行移動したグラフとみれます.

(1)(2) のどちらの考えであっても同じグラフになります．このように教科書は今まで別の解き方をしていたものも含めて「一般に」という言葉で，どんな場合でも使える公式を提示してきます.

そのため今まで解いてきた問題に関しても，次のような別の解釈も考えられます.

問 4. 傾きが 2 で $(2,3)$ を通る直線の方程式を求めなさい.

これも中学生の問題ですね．中学校の解答では求める直線を $y=ax+b$ とおいて，a は傾きだから $a=2$. $y=2x+b$ となって，この直線が $(2,3)$ を通るから代入して $3=2\cdot2+b$ より $b=-1$．よって求める直線は $y=2x-1$．として解答を得ます.

しかしこれを平行移動の観点から見ると，求める直線は，傾き 2 の $y=2x$ を平行移動したものです．原点 $(0,0)$ の点が通る点 $(2,3)$ に平行移動したと考えると，$y=2x$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 だけ平行移動しているので，求める直線は $y-3=2(x-2)$ となり，$y=2x-1$ となります.

違う事柄も見てみましょう．$y=(x-2)^2+3$ は $y-3=(x-2)^2$ と変形できるので $y=x^2$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したと考えられます．この移動をすると頂点 $(0,0)$ だったグラフは頂点 $(2,3)$ になるに決まってます．平行移動の観点から見た場合，頂点の考え方が当たり前のように感じませんか.

こうして見てみると $y=\sin(\theta-\frac{\pi}{3})$ も $y=\sin\theta$ の平行移動に見えてきますし，$(x-1)^2+(y-1)^2=2$ というグラフ (円) は $x^2+y^2=2$ の平行移動に見えてきます．教科書にはこのように一つの問題でも様々な解釈ができるものがあります．普段から色々な視点で問題を見ていると初見の問題でも「頭の中真っ白」という事はなくなります.